Lycée Pilote de Gabes

Profs: H.Abderrahim et H.Dhiaf

Devoir de synthèse n ° : 3

Le 13/05/2010

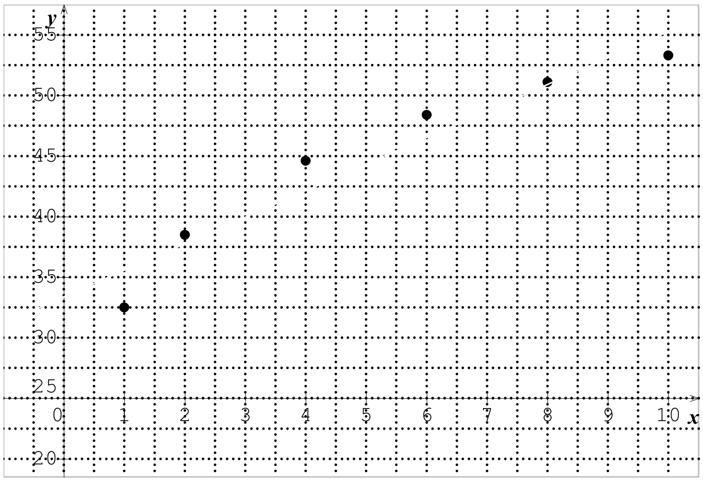
Classes : 4M 1&2

Mathématiques 4 h

Exercice n ° : 1 (4 points)

Pour des raisons pratiques, la production mensuelle du groupe chimique de l'un des produits qu'il commercialise ne doit pas excéder 10 tonnes.
Le groupe a relevé le coût total de production mensuelle en milles de dinars, noté y en fonction de la production x en tonnes. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

x	1	2	4	6	8	10
y	32.5	38.5	44.6	48.4	51.1	53.3



1°) On a représenté ci contre le nuage de points de la série (X , Y).
Indiquer si ce nuage justifie la recherche d'un ajustement affine entre X et Y

2°)a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.

b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

3°) On pose $z = e^{0.1y}$

a) Compléter le tableau suivant après l'avoir recopié sur votre copie:

x	1	2	4	6	8	10
z	25.79	46.99				

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.

Estimer le coût correspondant à une production de 7 tonnes.

Exercice n ° : 2 (4 points)

Le service après -vente d'une entreprise, vendant une certaine marque de calculatrices, c'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier, l'autre à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier »,
A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ».
On notera p(E) la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté E.
p(E|F) désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1°) a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : p(A|C), p(A|C) et p(C).

b) Construire un arbre pond´er´e décrivant cette situation.

2°) On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

a) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
c) En déduire p(A).
d) Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.
3°) Chaque calculatrice est vendue à 35 dinars.
Le service après-vente doit prendre en charge les réparations au cas où aurait un défaut :

- Si la calculatrice présente un défaut de clavier, le coût de la réparation est de 3 dinars.
- Si la calculatrice présente un défaut d'affichage, le coût de la réparation est de 5 dinars.
- Si la calculatrice présente les deux défauts, on rembourse la calculatrice au client.

Soit X la variable aléatoire égale au montant du chiffre d'affaire réalisé par calculatrice vendue

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer alors le chiffre d'affaire que peut espérer faire l'entreprise par calculatrice.

4°) On suppose que la durée de vie (exprimé en années) d'une calculatrice de cette marque est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,255$.

a) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice dure plus de 2 ans ?
b) Calculer la durée de vie moyenne d'une calculatrice de ce type.
c) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice dure plus de 5 ans sachant qu'elle a déjà durée plus de 3 ans

Exercice n ° : 3 **(3 points)**

Soit un espace probabilisé (E, P (E), p)

I°) Soit deux événements <u>indépendants</u> A et B.

1°) Voulant savoir si A et $\overline{B}$ sont indépendants ou non, un élève a débuté son essai comme suit :

On a : $P(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$ d'où : $p(A \cap \overline{B}) = P(A) - p(A \cap B) =$…………….=…………

Achever cet essai et conclure.

2°) Sa réussite à répondre à la première question l'a poussé à se poser la même question concernant $\overline{A}$ et $\overline{B}$: (il veut savoir si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ?)

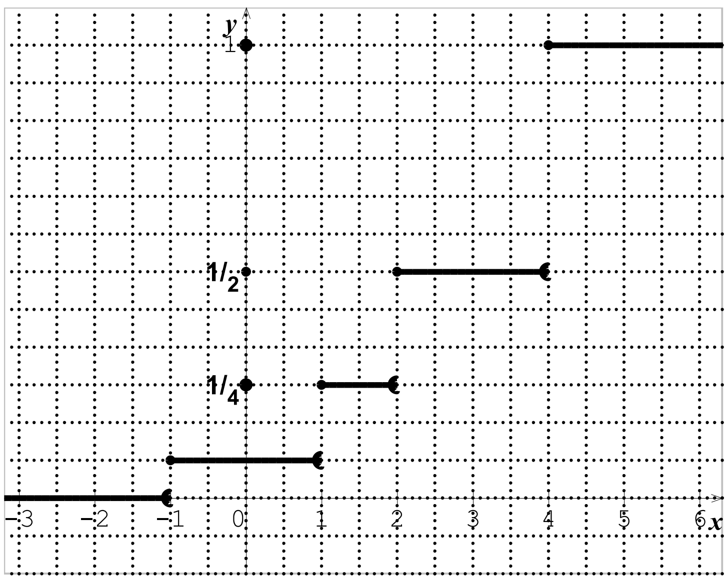
Il a fait un bon départ en écrivant :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Achever cet essai et conclure

3°) Que pensez-vous de $\overline{A}$ et B ?

II°) La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction de répartition F d'un aléa numérique X.



a) Calculer $p(X \leq 4)$ et $p(X > 2)$
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer E(X)

Exercice n° : 4 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'ellipse (E) d'équation: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ et on désigne par I le point de coordonnées

($3\sin\theta$, $2\cos\theta$); où θ est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) a) Déterminer l'excentricité, les foyers, les sommets et les directrices de (E).

b) Tracer (E); en précisera en particulier les tangentes aux sommets.

c) Vérifier que le point I appartient à (E).

2) On désigne par (T) la tangente à (E) au point I.

Vérifier que (T) a pour équation : $2\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y - 6 = 0$.

3) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On désigne par A l'aire du triangle OPQ.

a) Déterminer les coordonnées de P et Q.

b) Montrer que $A = \frac{6}{\sin 2\theta}$.

c) En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si I est le milieu du segment [PQ].

Exercice n° : 5 (5 points)

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit h la fonction numérique à variable réelle définie sur $]1, +\infty[$ par : $h(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1°) Montrer que l'on a : $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{2}\int_{n-1}^{n+1}\frac{dx}{x}\leq\frac{1}{n-1}$.

2°) Démontrer l'égalité : $\int_{n-1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. En déduire que : $0\leq h(n)\leq\frac{2}{n^2-1}$

3°)a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel élément de IR- {-1, 1} on a :
$\frac{2}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$.

b) On pose : $S_n=\frac{2}{n^2-1}+\frac{2}{(n+1)^2-1}+...+\frac{2}{(2n)^2-1}$. Simplifier l'expression de S_n

c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

4°)a) Déduire des résultats précédents que : $0\leq h(n)+h(n+1)+...+h(2n)\leq S_n$

b) Déterminer $\lim_{n\to\infty}\left(h(n)+h(n+1)+...+h(2n)\right)$.

5°) Pour n ≥ 2, on pose, $u_n=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{2n-1}$

a) Vérifier que : $h(n)+h(n+1)+...+h(2n)=u_n-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(2n+1)}{n-1}\right)$

b) En déduire que la suite (U_n) admet une limite finie que l'on précisera.